Lec 38 闭区间 $[a, b]$ 上连续函数的五大性质

38.1 一致连续性

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 则 $\forall x_0 \in I$, 有 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\epsilon, x_0) > 0, \forall |x - x_0| < \delta |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 恒成立.

若对 $\varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x_1, x_2 \in I, |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, 则称 $f(x)$ 在 I 上一致连续.

定义 38.1 (一致连续性)

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 若对 $\varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x_1, x_2 \in I, |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, 则称 $f(x)$ 在 I 上一致连续. ♣

由此可见, 一直连续是比连续条件更强的连续. 凡在 I 上一致连续的函数, 必在 I 上连续, 但反之不然.

例 38.1 证明 $f(x) = \sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 中一致连续.

证明 $|\sin x_1 - \sin x_2| = 2|\sin \frac{x_1 + x_2}{2} \cos \frac{x_1 - x_2}{2}| \leq |x_1 - x_2|$. 所以, 任给 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$, 则当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时就有 $|\sin x_1 - \sin x_2| < \varepsilon$.

例 38.2 证明 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上连续但不一致连续.

证明 对于 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 不管取什么样的正数 δ, 总有自然数 n, 使得 $\frac{1}{n} < \delta$. 取 $x' = \frac{1}{n}, x'' = \frac{1}{n+1}$, 则

$$|x' - x''| = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n} < \delta,$$

但

$$\left|\frac{1}{x''} - \frac{1}{x'}\right| = 1 > \frac{1}{2}.$$

即对于这样一个正数 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 函数在 $(0, 1)$ 上不存在统一的 δ.

38.2 五大特性

命题 38.1 (闭区间连续函数的五大性质)

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有如下五大性质:

性质 1 零值性: 若 $f(a)f(b) < 0$, 则 $\exists x_0 \in (a, b), s.t. f(x_0) = 0$. 称 x_0 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的零点.

性质 2 介值性: 若存在常数 h, 使 $f(a) < h < f(b)$, 则 $\exists x_0 \in (a, b), s.t. f(x_0) = h$.

性质 3 有界性: $\exists M > 0, s.t. |f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$.

性质 4 最值性: 必 $\exists x_1, x_2 \in [a,b], s.t. f(x_1) \le f(x) \le f(x_2), \forall x \in [a,b]$. 称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值和最小值.

性质 5 一致连续性: 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

证明 零值性, 零点定理

不妨设 $f(a) < 0 < f(b)$, 将区间 $[a,b]$ 划分为两等分, 如果在分点 $\xi = \dfrac{a+b}{2}$ 处取值为 0, 则定理得证. 否则 $\dfrac{a+b}{2}$ 必然与 $f(a)$ 和 $f(b)$ 中某一个异号, 即在两个点之间

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

中, 必有一个使得 $f(x)$ 在其端点取值异号, 但保持在左端点取值为负, 在右端点取值为正. 这个区间为 $[a,b_1]$. 重复上述过程, 除非某一次正好在分点处 $f(x)$ 取值为零, 否则就得到一列区间 $[a_n,b_n]$ 使得 $f(x)$ 在其左端点取值为负, 在右端点取值为正, 即

$$f(a_n) < 0 < f(b_n)$$

这一列区间 $[a_n,b_n]$ 满足区间套定理条件, 因此存在一点 $\xi \in [a_n,b_n]$, 满足

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \xi, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \xi,$$

由函数连续性可知

$$f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \le \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\xi),$$

即 $f(\xi) = 0$.

证明 介值性

对 $g(x) = f(x) - h$ 应用零值性即可.

证明 有界性

(反证) 假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界, 则对于任意自然数 n, 存在 $x_n \in [a,b]$ 使得 $|f(x_n)| > n$. 因为 $\{x_n\}$ 是有序数列, 所以根据定理**??**知道存在在收敛子列. 设 $x_{nk} \to x$ ($k \to \infty$) 是一个收敛子列. 显然,$x \in [a,b]$. 由于 f 的连续性, 得 $f(x_{nk}) \to f(x), (k \to \infty)$ 但是根据 x_n 的选择, 有 $|f(x_{nk})| \ge n_k, (k \to \infty)$, 这是矛盾的.

证明 最值性

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 所以在 $[a,b]$ 上有界. 设 $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$. 由上确界的定义可知, 对于任意自然数 n 存在 $x_n \in [a,b]$ 使得

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \le M.$$

这说明 $\{f(x_n)\}$ 收敛到 M. 由定理**??**知道在 $\{x_n\}$ 的收敛子列 $x_{nk} \to x^* \in [a,b]$. 于是

$$M = \lim_{k\to\infty} f(x_{nk}) = f(x^*).$$

这就证明了 f 在 $[a,b]$ 上取到上确界 M, 同时证 f 在 $[a,b]$ 上取到下确界.

证明 一致连续性

假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不是一致连续的, 则存在在某个正数 ε_0 使得对任意自然数 n, 都存在

在 $x_n, y_n \in [a,b]$ 满足 $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, 但是 $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$. 由定理**??**, 数列 $\{x_n\}$ 收敛于 $x \in [a,b]$. 从 $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ 知, $\{y_n\}$ 也收敛于 x. 由于 f 连续, 有 $\lim\limits_{k\to\infty}(f(x_{nk}) - f(y_{nk})) = f(x) - f(x) = 0$. 这与 $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$ 是矛盾的.

例 38.3 证明方程 $x^7 + \mathrm{e}^x = 3$ 在 $(0,1)$ 内存在唯一实根.

例 38.4 设 $f(x) \in C[a,b]$, 且 $f([a,b]) = [a,b]$, 则 $\exists x_0 \in [a,b], s.t. f(x_0) = x_0$.

✍ 作业 ex2.2:1,2,3,5,6,7,8,9;CH2:6.